STRATEGIEPAPIER für Abschlussprüfungen

1.) Gleichungen:

a.) „normale Gleichungen“:

Auflösen nach x (oder einer anderen Variablen)
Bestimmen der Lösungsmenge (L).

Beispiel:

$2x + 5 - 4x = 12 - 5x + 2$ / Zusammenfassen

$-2x + 5 = 14 - 5x$ $\quad / + 5x$

$3x + 5 = 14$ $\quad / - 5$

$3x = 9$ $\quad / : 3$

$x = 3$

$L = \{3\}$

b.) Gleichungssyteme:
(2 Gleichungen mit 2 Variablen)

1. Einsetzungsverfahren
2. Gleichsetzungsverfahren
3. Additionsverfahren

(aus 2 Gleichungen mit 2 Variablen 1 Gleichung mit 1 Variablen machen)

Beispiel: (Additionsverfahren)

1.) $3x + 2y = 6$ $\quad / \cdot (-2)$

2.) $2x + 4y = -8$

1.) $-6x - 4y = -12$ $\quad / +$

2.) $2x + 4y = -8$ $\quad / +$

$-4x = -20$ $\quad / : (-4)$

$x = 5$ $\quad \rightarrow$ in Gleichung 1.) oder 2.)

1.) $3 \cdot 5 + 2y = 6$

1.) $15 + 2y = 6$ $\quad / - 15$

1.) $2y = -9$ $\quad / : 2$

$y = -4{,}5$

$L = \{5\,; -4{,}5\}$

c.) Quadratische Gleichungen:

Gleichung auf Normalform bringen:

$x^2 + px + q = 0$

Anwenden der pq-Formel:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Beispiel:

$2x^2 - 4x - 6 = 10$ $\quad / - 10$

$2x^2 - 4x - 16 = 0$ $\quad / : 2$

$x^2 - 2x - 8 = 0$ $\quad / \, p = -2\,; q = -8$

$x_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1 + 8}$

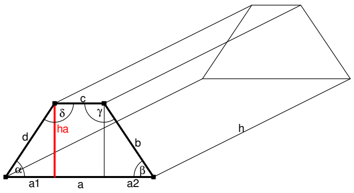
$x_1 = 1 + 3 = 4$

$x_2 = 1 - 3 = -2$

$L = \{4\,; -2\}$

2.) Körperberechnungen:

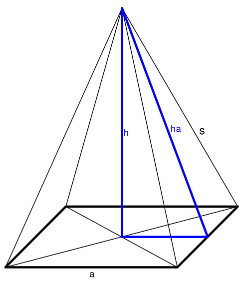
a.) Prisma:
(Würfel, Quader, 3-seitiges Prisma, trapezförmiges Prisma usw.)



$V = \text{Grundfläche} \cdot \text{Raumhöhe}$
$O = 2 \cdot \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$
$M = \text{Umfang der Grundfläche} \cdot \text{Raumhöhe}$

---

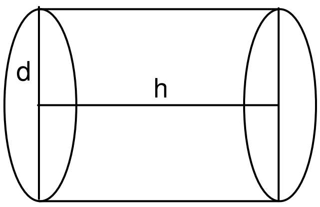
b.) Pyramiden:



$$V = \frac{\text{Grundfläche} \cdot \text{Raumhöhe}}{3}$$
$O = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche (Dreiecke)}$
$M = \text{Berechnung der äußeren Dreiecksflächen}$

---

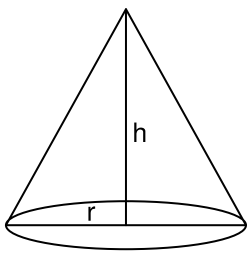
c.) Zylinder:



$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$O = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$

---

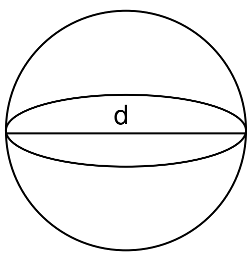
d.) Kegel:



$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$
$O = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot s$
$M = \pi \cdot r \cdot s$

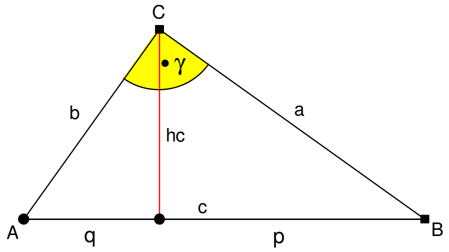
---

e.) Kugel:



$$V = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^3}{3}$$
$O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

3.) ## Berechnung von Längen bei Flächen und Körpern:



Satz des Pythagoras, wenn 90°-Winkel vorhanden sind:

$a^2 + b^2 = c^2$

Kathetensätze:

1.) $a^2 = c \cdot p$

2.) $b^2 = c \cdot q$

Höhensatz:

$h_c{}^2 = p \cdot q$

Anwendung Winkelfunktionen, wenn 90°-Winkel vorhanden sind:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$$

Anwendung der Winkelsätze, wenn kein 90°-Winkel vorhanden ist:

$$\text{Sinussatz}: \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Kosinussatz:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

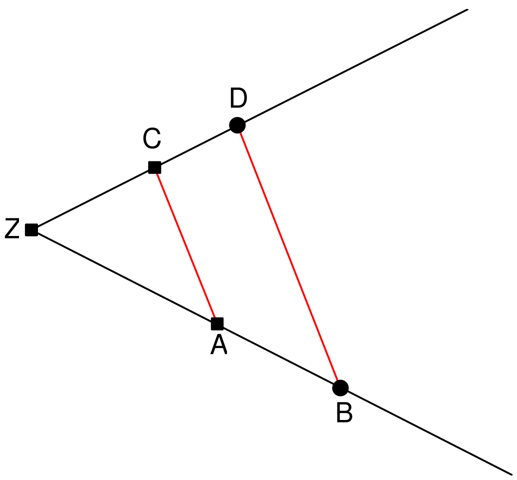
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

und:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$



Anwendung der Strahlensätze:

1. Strahlensatz:

1.) $ZA : ZB = ZC : ZD \Leftrightarrow \frac{ZA}{ZB} = \frac{ZC}{ZD}$

2.) $ZA : AB = ZC : CD \Leftrightarrow \frac{ZA}{AB} = \frac{ZC}{CD}$

2. Strahlensatz:

1.) $ZA : ZB = AC : BD \Leftrightarrow \frac{ZA}{ZB} = \frac{AC}{BD}$

2.) $ZC : ZD = AC : BD \Leftrightarrow \frac{ZC}{ZD} = \frac{AC}{BD}$

3.) $ZA : ZB = ZC : ZD \Leftrightarrow \frac{ZA}{ZB} = \frac{ZC}{ZD}$

4.) Potenzgesetze:

Für das Rechnen mit Potenzen gelten folgende Gesetze:

Gesetze:	Beispiele:
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $a^x : a^y = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$ $a^6 : a^5 = \frac{a^6}{a^5} = a^{6-5} = a^1 = a$
$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x \Leftrightarrow (a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$ $a^x : b^x = \left(\frac{a}{b}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$	$a^5 \cdot b^5 = (a \cdot b)^5 \Leftrightarrow (a \cdot b)^5 = a^5 \cdot b^5$ $a^3 : b^3 = \left(\frac{a}{b}\right)^3 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a^3}{b^3}$
$\left(a^x\right)^y = a^{x \cdot y}$	$\left(a^3\right)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$
$a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$	$a^{-5} = \left(\frac{1}{a}\right)^5 = \frac{1}{a^5}$
$a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\left(a^x\right)} = \left(\sqrt[y]{a}\right)^x$ $a^{-\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \left(\sqrt[y]{\frac{1}{a}}\right)^x$	$a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(a^2\right)} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$ $a^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{1}{a}\right)^2} = \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right)^2$

5.) Exponentielles Wachstum und Exponentieller Zerfall:

Lösung mit Hilfe der Wachstumsformel (Zinseszinsformel):

$k_n = k_0 \cdot q^n$

$\text{Endwert} = \text{Anfangswert} \cdot \text{Wachstumsfaktor}^{\text{Anzahl der Jahre}}$

Für den Zerfall gilt:

$k_n = k_0 \cdot q^n$

$\text{Endwert} = \text{Anfangswert} \cdot \text{Zerfallsfaktor}^{\text{Anzahl der Jahre}}$

Der Unterschied liegt also im Faktor:

Wachstumsfaktor: $1 + \frac{p}{100}$ $\quad p \triangleq \text{Prozentsatz}$

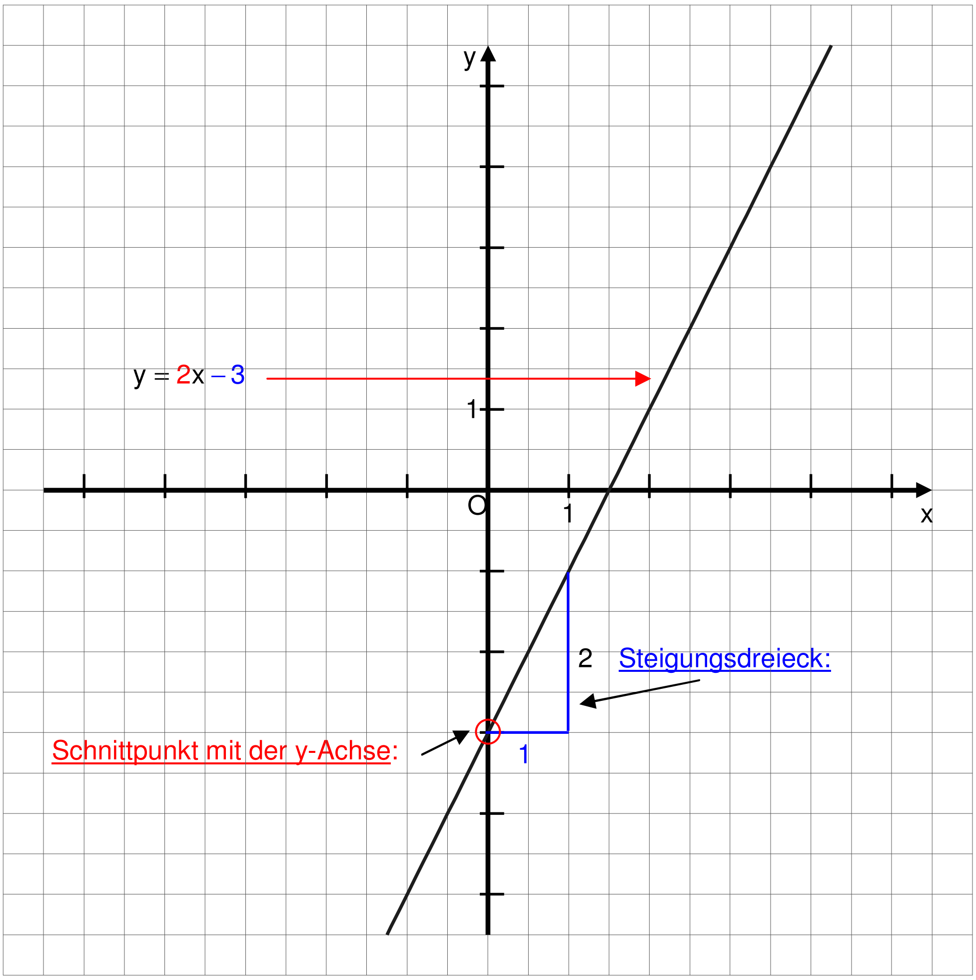
Zerfallsfaktor: $1 - \frac{p}{100}$ $\quad p \triangleq \text{Prozentsatz}$

6.) Funktionen:

a.) Lineare Funktion:

$y = mx + n$ m : Steigung

n : Schnittpunkt mit der y – Achse



b.) Quadratische Funktionen (Parabeln):

1

$y = ax^2$ Scheitelpunkt $S(0/0)$

Faktor a gibt Auskunft über die Öffnungsrichtung und Öffnungsweite der Parabel:

$a > 0$: Parabel ist nach oben geöffnet. $(y = 2 \cdot x^2)$

$a < 0$: Parabel ist nach unten geöffnet. $(y = -2 \cdot x^2)$

2

$y = ax^2 + c$ Scheitelpunkt $S(0/c)$

Wert c gibt Auskunft über die Verschiebung der Parabel in y-Richtung. $(\uparrow ; \downarrow)$

3

$y = a \cdot (x - b)^2$ Scheitelpunkt $S(-b/0)$

Wert b gibt Auskunft über die Verschiebung der Parabel in x-Richtung. $(\rightarrow ; \leftarrow)$

4

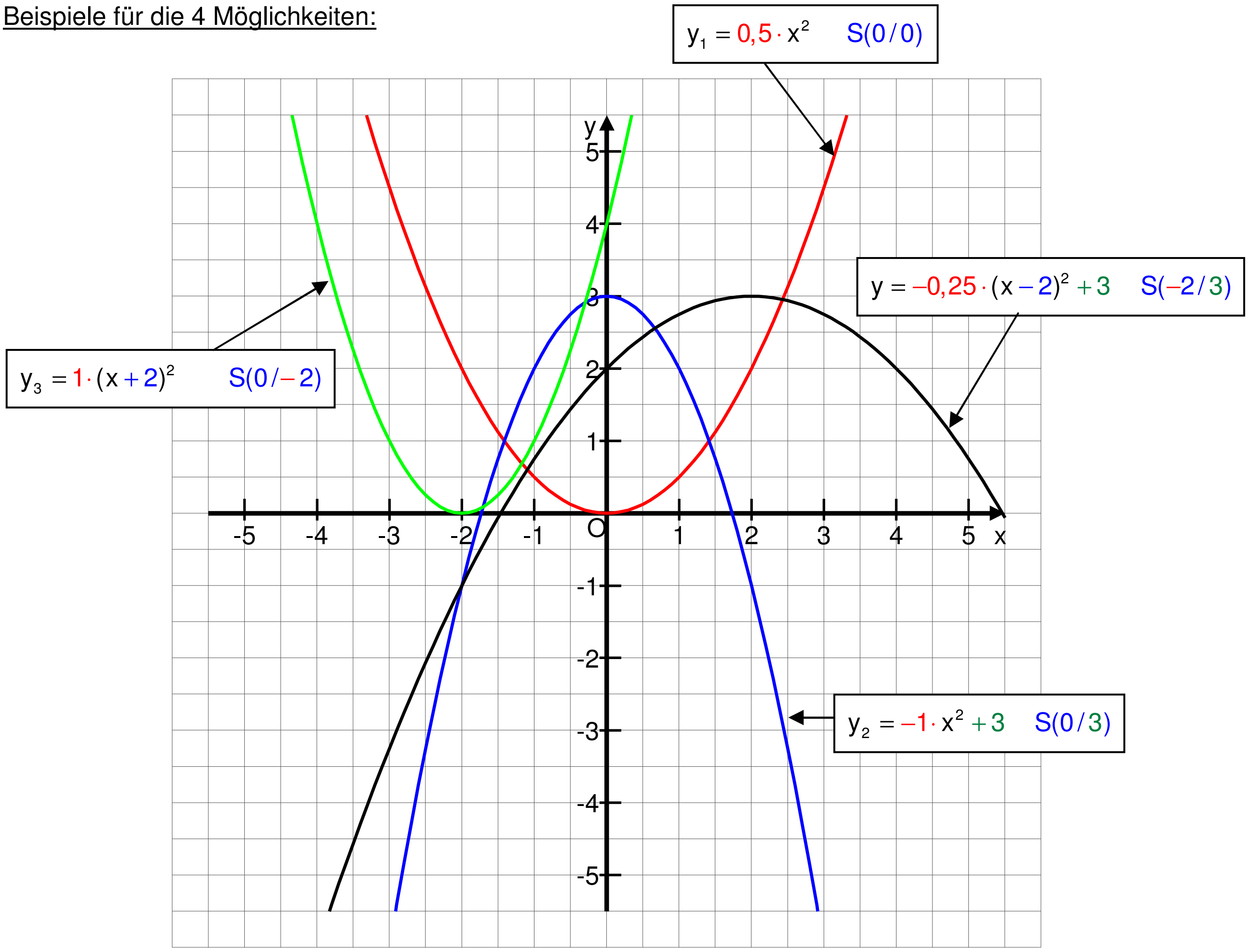
$y = a \cdot (x - b)^2 + c$ (Scheitelpunktform)

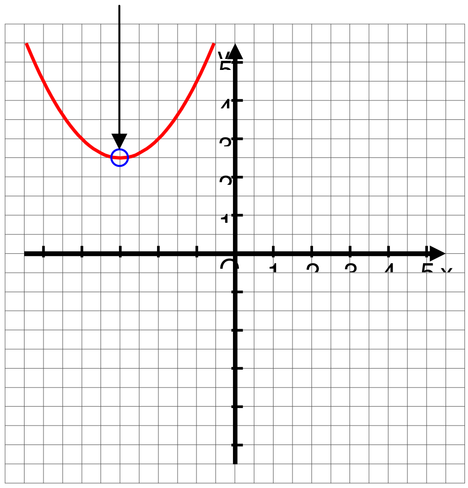
Scheitelpunkt $S(-b/c)$

Wert b gibt Auskunft über die Verschiebung der Parabel in x-Richtung. $(\rightarrow ; \leftarrow)$

Wert c gibt Auskunft über die Verschiebung der Parabel in y-Richtung. $(\uparrow ; \downarrow)$

Beispiele für die 4 Möglichkeiten:





Die allgemeine Parabelgleichung:

$y = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Parabelgleichung)

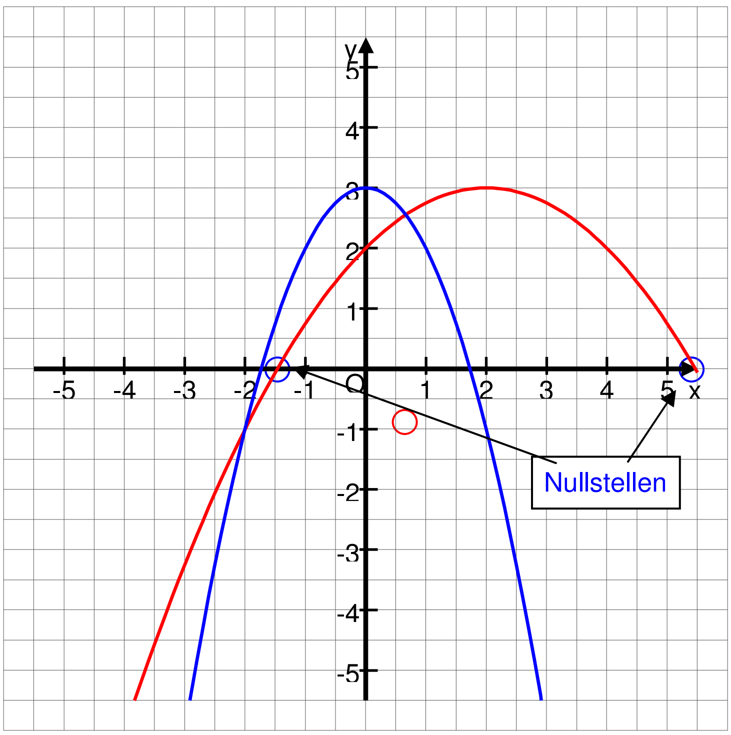
Diese Form muss erst in die Scheitelpunktform gebracht werden:

Beispiel:

$$y = 0{,}5x^2 + 3x + 7 \qquad / : 0{,}5$$
$$\frac{y}{0{,}5} = x^2 + 6x + 14 \qquad / \text{ quadratische Ergänzung}$$
$$\frac{y}{0{,}5} = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 14 \qquad / \text{ binomische Formel}$$
$$\frac{y}{0{,}5} = (x+3)^2 + 5 \qquad / \cdot 0{,}5$$
$$y = 0{,}5 \cdot (x+3)^2 + 2{,}5 \qquad \text{Scheitelpunktform}$$
$$S(-3/2{,}5)$$

Berechnung der Nullstellen einer Funktion:

(Nullstelle: Schnittpunkte der Funktion mit der x-Achse)



Man setzt in der Funktionsgleichung y = 0!

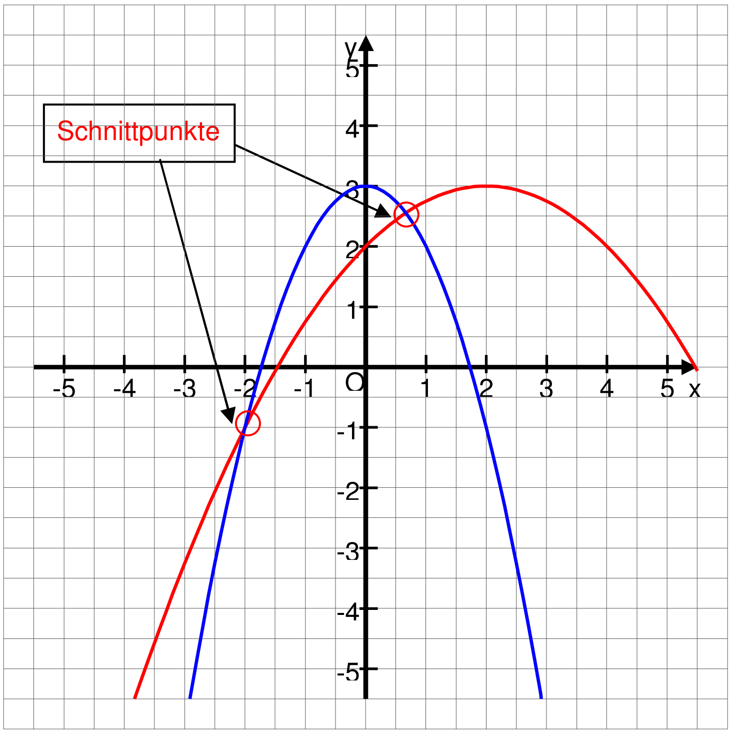
Beispiel (4) der letzten Seite:

$$y = -0{,}25 \cdot (x-2)^2 + 3 \qquad / \rightarrow y = 0$$
$$0 = -0{,}25 \cdot (x-2)^2 + 3 \qquad / -3$$
$$-3 = 0{,}25 \cdot (x-2)^2 \qquad / : (-0{,}25)$$
$$12 = (x-2)^2 \qquad / \sqrt{\ }$$
$$3{,}46 = x - 2 \text{ oder } -3{,}46 = x - 2 \qquad / +2$$
$$5{,}46 = x_1 \text{ oder } -1{,}46 = x_2$$

$N_1(5{,}46/0)$

$N_2(-1{,}46/0)$

Berechnung Schnittpunkte zweier Funktionen:



Man setzt die 2 Funktionsgleichungen gleich
Beispiele (2 und 4) der vorletzten Seite:

$y_2 = -1x^2 + 3$

$y_4 = -0{,}25 \cdot (x-2)^2 + 3$

$\Rightarrow$ gleichsetzen

$-1x^2 + 3 = -0{,}25 \cdot (x-2)^2 + 3$

$-1x^2 + 3 = -0{,}25 \cdot (x^2 - 4x + 4) + 3$

$-1x^2 + 3 = -0{,}25x^2 + x - 1 + 3$

$-1x^2 + 3 = -0{,}25x^2 + x + 2$

$0 = 0{,}75x^2 + x - 1$

$0 = x^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

$x_{1/2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}$

$x_{1/2} = -\frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9}}$

$x_1 = -\frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$

$x_2 = -\frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{6}{3} = -2$

$y_1 = -1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3 = 2\frac{5}{9} \approx 2{,}56$

$y_1 = -1 \cdot (-2)^2 + 3 = -1$

$S_1(0{,}67 / 2{,}56)$

$S_2(-2 / -1)$

Umrechnungen:

Längenmaße:

$1\,\text{mm} \xrightarrow{\cdot 10} 1\,\text{cm} \xrightarrow{\cdot 10} 1\,\text{dm} \xrightarrow{\cdot 10} 1\,\text{m} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,\text{km}$

Flächenmaße:

$1\,\text{mm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{cm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{dm}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{m}^2 \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{a} \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{ha} \xrightarrow{\cdot 100} 1\,\text{km}^2$

Volumenmaße:

$1\,\text{mm}^3 \xrightarrow{\cdot 1000} \underset{(1\,\text{ml})}{1\,\text{cm}^3} \xrightarrow{\cdot 1000} \underset{(1\,\text{Liter})}{1\,\text{dm}^3} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,\text{m}^3 \xrightarrow{\cdot 10^9} 1\,\text{km}^3$

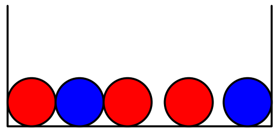
Gewichte:

$1\,\text{mg} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,\text{g} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,\text{kg} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\,\text{t}$

7.) Wahrscheinlichkeitsrechnung:

$$\text{Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses } P(E) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}$$

Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen

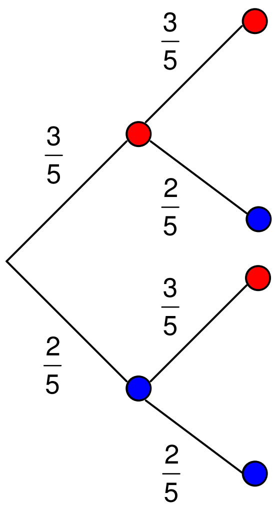


1.) In einem Gefäß befinden sich 3 rote und 2 blaue Kugeln. Tim zieht nacheinander 2 Kugeln. Bevor er die zweite Kugel zieht, legt er die zuerst gezogene Kugel wieder in das Gefäß zurück.

a.) Zeichne ein Baumdiagramm.
b.) Trage die Wahrscheinlichkeiten an die Äste des Baumdiagramms an.
c.) Wie viele Ergebnisse sind möglich?

Bestimme jetzt die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

a.) Beide Kugeln sind rot.
b.) Beide Kugeln sind blau.
c.) Die erste Kugel ist rot, die zweite Kugel blau.
d.) Mindestens eine Kugel ist rot.
e.) Keine Kugel ist blau.



Es sind folgende Ergebnisse möglich: $E = \{rr\,;rb\,;br\,;bb\}$

zu a.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 36\%$

zu b.) $P(E) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25} = 16\%$

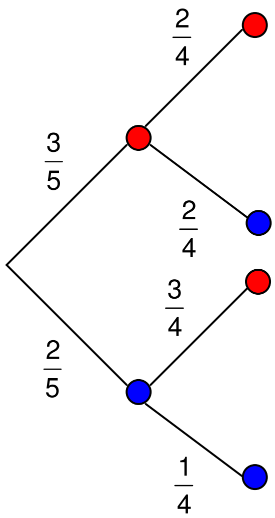
zu c.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} = 24\%$

Ziehen **mit** Zurücklegen

zu d.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} + \frac{6}{25} = \frac{15}{25} = 60\%$

zu e.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25} = 36\%$

2.) Auch Ina zieht nacheinander 2 Kugeln. Sie legt aber die zuerst gezogene Kugel **nicht** wieder in das Gefäß zurück.



a.) Zeichne ein Baumdiagramm.
b.) Trage die Wahrscheinlichkeiten an die Äste des Baumdiagramms an.
c.) Wie viele Ergebnisse sind möglich?

Bestimme jetzt die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:

a.) Beide Kugeln sind rot.
b.) Beide Kugeln sind blau.
c.) Die erste Kugel ist rot, die zweite Kugel blau.
d.) Mindestens eine Kugel ist rot.
e.) Keine Kugel ist blau.

Es sind folgende Ergebnisse möglich: $E = \{rr\,;rb\,;br\,;bb\}$

zu a.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 30\%$

zu b.) $P(E) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = 10\%$

2zu c.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 30\%$

Ziehen **ohne** Zurücklegen

zu d.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{12}{20} = 60\%$

zu e.) $P(E) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 30\%$

8.) Weitere wichtige Formeln:

a.) Prozentrechnung:

$$\text{Prozentwert(Pw)} = \frac{\text{Grundwert(G)} \cdot \text{Prozentsatz(p)}}{100}$$

$$\text{Grundwert(G)} = \frac{\text{Prozentwert(Pw)} \cdot 100}{\text{Prozentsatz(p)}}$$

$$\text{Prozentsatz(p)} = \frac{\text{Prozentwert(Pw)} \cdot 100}{\text{Grundwert(G)}}$$

b.) Zinsrechnung:

$$\text{Zinsen(z)} \quad \text{(in Tagen)} = \frac{\text{Kapital(k)} \cdot \text{Zinssatz(p)} \cdot \text{Zeit(i)}}{100 \cdot 360}$$

$$\text{Kapital(k)} \quad \text{(in Tagen)} = \frac{\text{Zinsen(z)} \cdot 100 \cdot 360}{\text{Zinssatz(p)} \cdot \text{Zeit(i)}}$$

$$\text{Zinssatz(p)} \quad \text{(in Tagen)} = \frac{\text{Zinsen(z)} \cdot 100 \cdot 360}{\text{Kapital(k)} \cdot \text{Zeit(i)}}$$

$$\text{Zeit(i)} \quad \text{(in Tagen)} = \frac{\text{Zinsen(z)} \cdot 100 \cdot 360}{\text{Kapital(k)} \cdot \text{Zinssatz(p)}}$$

c.) Zinseszins (Zinsen für mehrere Jahre):

$$\text{Endkapital } (k_n) = \text{Anfangskapital } (k_0) \cdot \text{Faktor } (q)^{\text{Anzahl Jahre (n)}}$$

Beispiel: Wie hoch ist das Endkapital, wenn man 5000 € zu 4,5% 7 Jahre auf der Bank behält?

$\text{Endkapital } (k_n) = 5000 \cdot 1{,}045^7$

$\text{Endkapital } (k_n) = 6804{,}31\ €$

Faktor q wird gebildet durch:
$q = 100\% + 4{,}5\% = 104{,}5\% = 1{,}045$

d.) Binomische Formeln:

1. binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. binomische Formel: $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$